HUBUNGAN LIMIT FUNGSI DAN LIMIT BARISAN PADA TOPOLOGI REAL

Ukhti Raudhatul Jannah
Program Studi Pendidikan Matematika, FKIP, Universitas Madura
Alamat Jalan Raya Panglegur 3,5 KM Pamekasan

Abstrak: Tulisan ini menyajikan definisi dan teorema limit fungsi dan limit barisan pada topologi real yang bertujuan untuk mengetahui hubungan antara limit fungsi dan limit barisan pada topologi real. Misalkan diberikan suatu barisan (x_n) pada bilangan real dan suatu bilangan real x , bilangan x adalah limit barisan (x_n) jika untuk setiap lingkungan U dari x , barisan (x_n) adalah eventually pada U , dan Misalkan $f: S \to R$, $S \subseteq R$ dengan α suatu bilangan real, $\alpha \in \mathcal{L}(S)$ (himpunan semua titik limit dari S). Bilangan α dikatakan limit dari f . Jika untuk setiap lingkungan V dari α mendapatkan lingkungan U dari a sedemikian sehingga $f(x) \in V$ untuk setiap $x \in U \cap S\{a\}$. Akan mencari hubungan antara kedunya, yaitu dengan menggunakan definisi dan teorema mengenai limit fungsi dan limit barisan pada topologi real.

Kata kunci: Barisan, Neighborhood (lingkungan), Titik Limit, Eventually, Frequently, Limit Barisan, Limit Parsial, Limit Fungsi, dan Limit Pada Tak Hingga.

PENDAHULUAN

Untuk mencari hubungan antara limit fungsi dan limit barisan, terlebih dahulu akan dibicarakan mengenai definisi barisan, definisi subbarisan, definisi neighborhood (lingkungan), definisi Eventually, Frequently dan definisi serta teorema mengenai limit fungsi dan barisan pada topologi real, antara lain; definisi Limit Barisan, definisi Limit Parsial, definisi Limit Fungsi, teorema Limit Tak Hingga dan teorema Limit pada Tak Hingga.

Definisi 1.
Barisan bilangan real adalah fungsi $X: N \to N$. Jika $X: N \to N$ adalah barisan bilangan real maka nilai fungsi X di $n \in N$ dinotasikan sebagai x_n . Nilai x_n ini disebut suku ke-n dari barisan bilangan real X . Barisan bilangan real X dapat pula dituliskan sebagai $(x_n \ : n \in N)$ atau (x_n).

Definisi 2.
Misalkan $X = (x_n)$ adalalah barisan bilangan real dan misalkan $n_1 < n_2 < n_3 < \cdots < n_k < \cdots$ barisan bilangan asli naik kuat, maka $X' = (x_{n_k})$ yang diberikan dengan $(x_{n_1}, x_{n_2}, \ldots, x_{n_k}, \ldots)$ dikatakan subbarisan dari $X = (x_n)$.

Definisi 3.
Misalkan $a \in R$ dan $\delta > 0$. Himpunan $V_\delta(a) = \{a \in R||x - a| < \delta\}$ disebut lingkungan -δ dari *a*. lingkungan dari *a* adalah sebarang himpunan yang memuat lingkungan -δ dari *a* untuk suatu $\delta > 0$.

Definisi 4.
Jika A suatu himpunan bilangan real dan $x \in R$ maka kita katakan bahwa x adalah titik limit dari himpunan *A* jika untuk setiap bilangan $\delta > 0$ berlaku $(x - \delta, \delta + x) \cap A \setminus \{x\} \neq \emptyset$.

Ekuivalen, dengan suatu bilangan x adalah titik limit dari suatu himpunan A jika dan hanya jika untuk setiap lingkungan (Neighborhoods) V_δ dari x berlaku $V_\delta \cap A \setminus \{x\} \neq \emptyset$. Himpunan dari setiap titik limit dari A adalah $\mathcal{L}(A)$. Titik limit kadang-kadang disebut dengan titik akumulasi.

Lemma 1.
Jika $A \subseteq R$ dan $x \in R$, maka x adalah titik limit dari A jika dan hanya jika untuk setiap $\delta > 0$ lingkungan $(x-\delta, x+\delta)$ memuat tak hingga banyak anggota dari A .

Bukti :
Jika untuk setiap $\delta > 0$ himpunan $(x-\delta, x+\delta)$ memuat tak hingga banyak anggota dari A, maka untuk setiap $\delta > 0$ himpunan $(x-\delta, x+\delta)\{x\}$ paling sedikit harus memuat satu (dan dalam fakta tak hingga banyak) anggota dari A dan itu jelas bahwa x adalah titik limit dari A . Untuk membuktikan konvers, kita menganggap bahwa x adalah titik limit dari A . Oleh definisi, cara ini bahwa untuk setiap $\delta > 0$ himpunan $(x-\delta, x+\delta)\{x\}$ paling sedikit memuat satu anggota dari A . Untuk memperoleh suatu kontradiksi, anggap bahwa ada $\delta_1 > 0$ sedemikian sehingga $(x-\delta_1, x+\delta_1)$ hanya memuat suatu bilangan hingga anggota dari A . Maka himpunan $(x-\delta_{\downarrow}1, x+\delta_{\downarrow}1)\{x\}$ juga harus memuat suatu bilangan hingga dari anggota, $a_1, a_2, \ldots a_n$, dari A . Karena himpunan $\{a_1, a_2, \ldots a_n\}$ adalah hingga dan x adalah bukan anggota dari himpunan, ada $j \in \{1, 2, \ldots n\}$ sedemikian sehingga $0 < |a_j - x| \leq |a_i - x|$ untuk setiap $i \in \{1, 2, \ldots n\}$ (bahwa, titik a_i semakin dekat pada x dari pada sembarang a_i yang lain). Karena jika kita misalkan $\delta_2 = \dfrac{|a_j - x|}{2}$, maka $\delta_2 > 0$ dan himpunan $(x-\delta_{\downarrow}2, x+\square\,\delta\square_{\downarrow}2)\{x\}$ tidak memuat anggota dari A . Karena untuk setiap $\delta > 0$, himpunan $(x-\delta, x+\delta)$ memuat tak hingga banyak anggota dari A .

Definisi 5.
Misalkan barisan (x_n) pada bilangan real dan bahwa $S \subseteq R$. Barisan (x_n) dikatakan eventually pada himpunan S jika $x_n \in S$ untuk setiap n yang cukup besar. Dengan kata lain, barisan (x_n) adalah **eventually** pada S jika ada suatu bilangan N sedemikian sehingga $x_n \in S$ bila mana $n \geq N$.
Barisan (x_n) dikatakan frequently pada himpunan S jika mempunyai $x_n \in S$ tak hingga banyak bilangan n . Dengan kata lain, barisan (x_n) dikatakan **frequently** pada himpunan S bila mana himpunan $\{n | x_n \in S\}$ tak hingga.

Definisi 6.

a. Diberikan suatu barisan (x_n) pada bilangan real dan suatu bilangan real x , bilangan x dikatakan limit barisan (x_n) jika untuk setiap lingkungan U dari x , barisan (x_n) adalah eventually pada U . Bila mana x limit dari (x_n) maka ditulis $x_n \to x$ selama $n \to \infty$. Suatu barisan (x_n) dikatakan konvergen jika ada bilangan real x sedemikian sehingga $x_n \to x$. Dalam fakta bahwa jika $x_n \to x$, maka dikatakan bahwa barisan (x_n) konvergen pada x . jika tidak ada bilangan real x sedemikian sehingga $x_n \to x$, maka dikatakan bahwa barisan (x_n) divergen.

b. Barisan $X = (x_n)$ dikatakan konvergen pada bilangan real a dari $X = (x_n)$, jika $\forall\, \varepsilon > 0$ ada $K(\varepsilon) \in N$ sedemikian sehingga untuk setiap $K \leq n$ berlaku $|x_n - a| < \varepsilon, \forall\, n \in N$. Barisan $X = (x_n)$ konvergen pada bilangan real a ditulis $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n) = a$ atau $x_n \to a$ atau $n \to \infty$. Suatu barisan yang tidak konvergen ke suatu bilangan real a dinamakan divergen, atau jika $X = (x_n)$ merupakan barisan tidak konvergen ke bilangan real a , maka $\exists\, \varepsilon > 0 \ni \forall\, K \in N$ dengan $K \leq n$ berlaku $|x_n - a| \geq \varepsilon$.

c. Diberikan suatu barisan (x_n) pada bilangan real dan suatu bilangan real x , bilangan x dikatakan **limit parsial** dari barisan (x_n) jika untuk setiap lingkungan U dari x , barisan (x_n) adalah frequently pada U .

Teorema 1.
Misalkan (x_n) barisan dalam bilangan real dan $x \in R$. Maka kedua kondisi berikut ekuivalen.

a. $x_n \to x$ selama $n \to \infty$
b. Untuk setiap bilangan $\delta > 0$ barisan (x_n) adalah eventually dalam interval $(x-\delta, \delta + x)$

Bukti :

Kasus $a \Rightarrow b$

Asumsikan (a) benar. Misalkan $\delta > 0$ diberikan. Maka ada lingkungan $(x-\delta, \delta + x)$ dari x .
Karena $(x-\delta, \delta + x)$ adalah lingkungan dari x . Maka ada bilangan asli N sehingga $x_n \in (x-\delta, \delta + x)$ bila mana $n \geq N$. Akibatnya sesuai dengan definisi barisan (x_n) adalah eventually pada $(x-\delta, \delta + x)$.

Kasus $b \Rightarrow a$

Asumsikan (b) benar. Misalkan U adalah lingkungan dari x . Pilih suatu bilangan $\delta > 0$ sedemikian sehingga $(x-\delta, \delta + x) \subseteq U$. Maka karena (x_n) adalah eventually pada $(x-\delta, \delta + x)$. Akibatnya sesuai dengan definisi barisan (x_n) adalah eventually pada U . Dengan kata lian, $x_n \to x$ selama $n \to \infty$.

Teorema 2. Misalkan (x_n) barisan dari bilangan real dan $\in$ R . kedua kondisi berikut ekuivalen :

a. x adalah limit parsial dari (x_n).
b. Ada suatu subbarisan (x_n) yang konvergen pada x .

Bukti :

Kasus $b \Rightarrow a$

Asumsikan (b) benar. Pilih suatu subbarisan (y_n) dari (x_n) sedemikian sehingga $y_n \to x$, dan pilih suatu barisan naik tegas (n_i) sedemikian sehingga $y_i = x_{n_i}$ untuk setiap i . Misalkan U adalah sembarang lingkungan dari x . Akibatnya $x_{n_i} \in U$ untuk setiap i yang cukup besar. Dengan kata lain, (x_n) adalah frequently pada U . Akibatnya, sesuai definisi x adalah limit parsial dari (x_n).

Kasus $a \Rightarrow b$

Misalkan x adalah limit parsial dari $[(x]_n)$. Akan ditunjukkan ada subbarisan dari (x_n) yang konvergen pada x . Dengan memulai mengobservasi interval $(x-1, x+$ 1) adalah lingkungan dari x , berdasarkan fakta bahwa x adalah limit parsial dari $[(x]_n)$. Akibtnya $(x-1, x+1)$ memuat tak hingga banyak anggota (x_n). Pilih suatu bilangan n_1 sedemikian sehingga $x_{n_i} \in (x-1, x+1)$. Dengan menggunakan fakta bahwa $[(x]_n)$ frequently pada interval $\left(x-\frac{1}{2}, x+\frac{1}{2}\right)$. Pilih suatu bilangan asli n_2 dengan $n_2 > n_1$ sedemikian sehingga

$$x_{n_2} \in \left(x-\frac{1}{2}, x+\frac{1}{2}\right).$$

Demikian seterusnya, sehingga akan memperoleh barisan naik tegas $[(n]_i)$ dari bilangan asli sedemikian sehingga $x_{n_i} \in \left(x-\frac{1}{i}, x+\frac{1}{i}\right)$ untuk setiap i . Akibatnya, bila i semakin besar maka $x_{n_i} \to x$ selama $n \to \infty$.

Teorema 3.
Misalkan (x_n) barisan dari bilangan real dan $x \in [-\infty, \infty]$. Kedua kondisi berikut ekuivalen :

a. x adalah limit parsial dari (x_n)
b. Ada suatu subbarisan dari (x_n) yang limitnya adalah x

Bukti :

Kasus $a \Rightarrow b$

Asumsikan bahwa x adalah parsial limit dari (x_n) . jika $x \in R$ maka kondisi (b) memenuhi

Teorema 2.

Misalkan $x = \infty$. berdasarkan fakta bahwa (x_n) tak terbatas atas. Sesuai dengan bukti pada Teorema 2. Pilih bilangan asli n_1 sedemikian sehingga $x_{n_1} > 1$. Selanjutnya pilih $n_2 > n_1$ sedemikian sehingga $x_{n_2} > 2$. Dengan cara yang sama akan mempunyai barisan naik tegas (n_i) dari bilangan asli sedemikian sehingga $x_{n_i} > i$ untuk setiap i . Akibatnya seperti bukti pada teorema 2 maka mempunyai subbarisan $\left(x_{n_i}\right)$ dari (x_n) sedemikian sehingga $x_{n_i} \to \infty$ selama $i \to \infty$. Dengan cara yang sama untuk kondisi $x = -\infty$.

Kasus $b \Rightarrow a$

Misalkan ada suatu subbarisan dari (x_n) yang limitnya adalah x dengan menggunakan teorema 2. Maka akibatnya x adalah limit parsial dari (x_n) .

Teorema 4.

Misalkan (x_n) barisan dari bilangan real dan $x \in [-\infty, \infty]$. Salah satu dari $x_n \to x$ selama $n \to \infty$ atau ada subbarisan $\left(x_{n_i}\right)$ dari (x_n), dan suatu titik $y \in [-\infty, \infty]\ \{x\}$, sedemikian sehingga $x_{n_i} \to y$ selama $i \to \infty$

Bukti :

Misalkan tidak mempunyai $x_n \to x$ selama $n \to \infty$. Berdasarkan teorema 2 dan teorema 3, pilih subbarisan barisan dari $\left(x_{n_i}\right)$ dari (x_n) dan suatu titik $y \in [-\infty, \infty]\ \{x\}$ sedemikian sehingga $x_{n_i} \to y$ selama $i \to \infty$.

Definisi 7. Anggap bahwa $S \subseteq R$ dan bahwa $f\colon S \to R$. Diberikan suatu titik $\alpha \in \mathcal{L}(S)$ dan suatu bilangan real α . Bilangan α dikatakan limit dari f ditulis $f(x) \to \alpha$ selama $x \to a$. Jika untuk setiap lingkungan V dari α memungkinkan mendapatkan lingkungan U dari a sedemikian sehingga $f(x) \in V$ untuk semua titik $x \in U \cap S\{a\}$.

Teorema 5.

Misalkan bahwa $f\colon S \to R$ dimana $S \subseteq R$ dengan a dan α adalah bilangan real. Maka kedua kondisi berikut ekuivalen :

a. $f(x) \to \alpha$ selama $x \to a$.
b. untuk setiap lingkungan V dari α ada suatu bilangan $\delta > 0$ sedemikian sehingga bila mana $x \in S\{a\}$ dan $|a - x| < \delta$ mempunyai $f(x) \in V$.

Bukti :

Kasus $a \Rightarrow b$.

Asumsikan (a) benar. Misalkan V lingkungan dari α . Dengan menggunakan fakta bahwa $f(x) \to \alpha$ selama $x \to a$, pilih suatu lingkungan U dari a sedemikian sehingga $f(x) \in V$ untuk semua titik $x \in U \cap S\{a\}$. Selanjutnya dengan menggunakan fakta bahwa U lingkungan dari a, pilih suatu bilangan $\delta > 0$ sedemikian sehingga $(x - \delta, \delta + x) \subseteq U$. Oleh karena itu, berdasarkan definisi, bila $x \in S\{a\}$ dan $|a - x| < \delta$ maka mempunyai $f(x) \in V$.

Kasus $b \Rightarrow a$

Asumsikan (a) benar. Misalkan V lingkungan dari α . Dengan menggunakan kondisi (b), pilih suatu bilangan $\delta > 0$ sedemikian sehingga $f(x) \in V$ bila mana $x \in S\{a\}$ dan $|a - x| < \delta$.

Definisikan $U = (x - \delta, \delta + x)$. Dengan mengobservasi bahwa U lingkungan dari a dan bahwa $f(x) \in V$ untuk setiap titik $x \in U \cap S\{a\}$. Maka sesuai definisi diperoleh $f(x) \to \alpha$ selama $x \to a$.

Definisi 8.

Misalkan bahwa $f\colon S \to R$ dimana $S \subseteq R$ dan misalkan bahwa $a \in \mathcal{L}(S)$ dikatakan $f(x) \to \infty$ selama $x \to a$ bila untuk setiap ligkungan V dari ∞ ada suatu lingkungan U dari a sedemikian sehingga $f(x) \in V$ untuk setiap $x \in U \cap S\{a\}$.

Definisi 9.

Misalkan bahwa $f: S \to R$ dimana $S \subseteq R$ dan bahwa $\alpha \in [-\infty, \infty$]. Jika ∞ adalah titik limit dari S (dengan kata lain, jika S tak terbatas atas). Maka kondisi $f(x) \to \alpha$ selama $x \to \infty$ diartikan untuk semua lingkungan V dari α ada suatu lingkungan U dari ∞ sedemikian sehingga $f(x) \in V$ untuk setiap bilangan $x \in S \cap U$.

Teorema 6.

Misalkan $f: S \to R$ dengan $S \subseteq R$, misalkan $a \in \mathcal{L}(S)$ dan $\alpha \in R$. Maka kedua kondisi berikut ekuivalen :

a. $f(x) \to \alpha$ selama $x \to a$

b. Untuk setiap barisan (x_n) dalam himpunan $S\{a\}$ memenuhi $x_n \to a$, maka mempunyai $f(x_n) \to \alpha$.

Bukti :

Kasus $a \Rightarrow b$

Asumsikan (a) benar. Misalkan (x_n) suatu barisan dalam himpunan $S\{a\}$ sedemikian sehingga $x_n \to a$. Akan ditunjukkan bahwa $f(x_n) \to \alpha$. Misalkan V adalah lingkungan dari α . Pilih suatu lingkungan U dari a sedemikian sehingga untuk setiap titik $x \in U \cap S\{a\}$ mempunyai $f(x) \in V$. Selanjutnya dengan menggunakan fakta bahwa $x_n \to a$, pilih suatu bilangan asli N sedemikian sehigga bila mana $n \geq N$ mempunyai $x_n \in U$ untuk setiap n . Karena bersarkan fakta bahwa barisan (x_n) dalam himpunan $S\{a\}$ dan $x_n \in U$. Maka untuk setiap bilangan $n \geq N$ mempunyai $x_{\downarrow}n \in U \cap S\{a\}$. Oleh karena itu, mempunyai $f(x_n) \in V$. Dengan kata lain, untuk setiap barisan (x_n) dalam himpunan $S\{a\}$ memenuhi $x_n \to a$, maka mempunyai $f(x_n) \to \alpha$ untuk setiap $n \geq N$.

Kasus $b \Rightarrow a$

Pembuktian ini akan menggunakan konvers, akan diarahkan mendapatkan suatu kontradiksi. Asumsikan bahwa (b) benar. Misalkan kondisi (a) salah. Pilih lingkungan V dari α sedemikian sehingga untuk setiap lingkungan U dari a , ada suatu titik x dalam himpunan $U \cap S\{a\}$ sedemikian sehingga $f(x) \notin V$. Untuk setiap bilangan asli n , pilih suatu titik sebut x_n sedemikian sehingga $x_{\downarrow}n \in (a - 1/n \ , a + 1/n \ ) \cap S\{a\}$ dengan $f(x_n) \notin V$, karena barisan (x_n) konvergen pada a , akibatnya mempunyai $f(x_n) \to \alpha$, hal ini kontradiksi karena $f(x_n)$ adalah tidak pernah dalam lingkungan V dari α .

Teorema 7.

Misalkan $f: S \to R$ dengan $S \subseteq R$, dan $\alpha \in R$. Maka kedua kondisi berikut ekuivalen.

a. $f(x) \to \alpha$ selama $x \to \infty$

b. Untuk setiap barisan (x_n) dalam himpunan S memenuhi $x_n \to \infty$, maka mempunyai $f(x_n) \to \alpha$.

Bukti :

Kasus $a \Rightarrow b$

Asumsikan (a) benar dan misalkan (x_n) suatu barisan dalam himpunan S sedemikian sehingga $x_n \to \infty$. Akan ditunjukkan bahwa $f(x_n) \to \alpha$. Misalkan V adalah lingkungan dari α. Ada suatu lingkungan U dari ∞ sedemikian sehingga untuk setiap $x \in U \cap S$ mempunyai $f(x) \in V$. Selanjutnya dengan menggunakan fakta bahwa $x_n \to a$, pilih suatu bilangan asli N sedemikian sehigga bila mana $n \geq N$ mempunyai $x_n \in U$ untuk setiap n . Karena Bersarkan fakta bahwa barisan (x_n) dalam himpunan S dan $x_n \in U$.

Maka untuk setiap bilangan $n \geq N$ mempunyai $x_n \in U \cap S$, dan oleh karena itu, mempunyai $f(x_n) \in V$. Dengan kata lain, untuk setiap barisan (x_n) dalam himpunan S memenuhi $x_n \to \infty$, maka mempunyai $f(x_n) \to \alpha$ untuk setiap $n \geq N$.

Kasus $b \Rightarrow a$

Pada pembuktian ini akan menggunakan konvers, dan akan menggunakan kontradiksi. Asumsikan bahwa (b) benar. Misalkan kondisi (a) salah. Pilih lingkungan V dari α sedemikian sehingga untuk setiap lingkungan U dari ∞. Dengan menggunakan fakta bahwa $f(x) \to \alpha$ selama $x \to \infty$ adalah salah. Pilih suatu bilangan $\delta > 0$ sedemikian sehingga V adalah lingkungan dari α dan untuk setiap bilangan real v terdapat minimal suatu bilangan $x \in (v, \infty) \cap S$ sedemikian sehingga $f(x) \notin V$. Untuk setiap bilangan asli n, pilih suatu bilangan sebut x_n dengan $x_n \in S$ sedemikian sehingga $x_n > n$ dan $f(x) \notin V$. Akibatnya dalam hal ini mendapatkan suatu barisan $(x_n) \in S$ sedemikian sehingga $x_n \to \infty$, meskipun barisan $(f(x_n))$ berkorespondensi mempunyai nilai limit α. Dengan kata lain (b) salah, hal ini kontradiksi dengan asumsi bahwa (b) benar.

Teorema 8.

Misalkan $f: S \to R$ dengan $S \subseteq R$, dan $a \in \mathcal{L}(S)$. Maka kedua kondisi berikut ekuivalen :

a. $f(x) \to \infty$ selama $x \to a$
b. Untuk setiap barisan (x_n) dalam himpunan $S\{a\}$ memenuhi $x_n \to a$, maka mempunyai $f(x_n) \to \infty$.

Bukti :

Kasus $a \Rightarrow b$

Asumsikan (a) benar. Misalkan (x_n) suatu barisan dalam himpunan S sedemikian sehingga $x_n \to a$. Akan ditunjukkan bahwa $f(x_n) \to \infty$. Misalkan V adalah lingkungan dari ∞ ada suatu lingkungan U dari a sedemikian sehingga untuk setiap titik $x \in U \cap S\{a\}$ mempunyai $f(x) \in V$. Selanjutnya dengan menggunakan fakta bahwa $x_n \to a$, pilih suatu bilangan asli N sedemikian sehigga bila mana $n \geq N$ mempunyai $x_n \in U$ untuk setiap n. Karena Berdasarkan fakta bahwa barisan (x_n) dalam himpunan $S\{a\}$ dan $x_n \in U$. Maka untuk setiap bilangan $n \geq N$ mempunyai $x_{\downarrow}n \in U \cap S\{a\}$, dan oleh karena itu, mempunyai $f(x_n) \in V$. Dengan kata lain, untuk setiap barisan (x_n) dalam himpunan S memenuhi $x_n \to a$, maka mempunyai $f(x_n) \to \infty$ untuk setiap $n \geq N$.

Kasus $b \Rightarrow a$

Untuk bukti kasus ini akan menggunakan konvers dan akan mendapatkan suatu kontradiksi. Asumsikan bahwa (b) benar. Misalkan kondisi (a) salah. Artinya ada lingkungan V dari ∞ sedemikian sehingga untuk setiap lingkungan U dari a, ada suatu titik x dalam himpunan $U \cap S\{a\}$ sedemikian sehingga $f(x) \notin V$. Jika diberikan suatu bilangan $\delta = \frac{1}{n} > 0$ untuk setiap bilangan asli n, pilih suatu titik sebut x_n sedemikian sehingga $x_{\downarrow}n \in (a - 1/n \ , a + 1/n \ ) \cap S\{a\}$ dan $f(x_n) \notin V$, dan karena barisan (x_n) konvergen pada a, akibatnya mempunyai $f(x_n) \to \infty$, hal ini kontradiksi dengan $f(x_n)$ yang tidak pernah dalam lingkungan V dari ∞.

Teorema 9.

Misalkan $f: S \to R$ dengan $S \subseteq R$. Misalkan $a \in \mathcal{L}(S)$ dan $\alpha \in [-\infty, \infty]$. Maka salah satu $f(x) \to \alpha$ selama $x \to a$ atau ada suatu barisan (x_n) dalam S dan suatu titik $y \in [-\infty, \infty] \ \{\alpha\}$ sedemikian sehingga $x_n \to a$ dan $f(x_n) \to y$.

Bukti :
Misalkan tidak mempunyai $f(x) \to \alpha$ selama $x \to a$, Pilih suatu barisan (x_n) dalam S sedemikian sehingga $x_n \to a$ meskipun barisan$(f(x_n))$ tidak konvergen pada α . Dengan menggunakan Teorema 4 pilih subbarisan $\left(f\left(x_{n_i}\right)\right)$ dari barisan $(f(x_n))$ dan suatu titik $y \in [-\infty, \infty]$ $\{\alpha\}$ sedemikian sehingga $\left(f\left(x_{n_i}\right)\right) \to y$ selama $i \to \infty$. karena $\left(f\left(x_{n_i}\right)\right)$ subbarisan dari barisan $(f(x_n))$ sedemikian sehingga $\left(f\left(x_{n_i}\right)\right) \to y$ selama $i \to \infty$. akibatnya $f(x_n) \to y$.

KESIMPULAN
Dengan menggunakan definisi dan teorema mengenai limit fungsi dan limit barisan pada topologi real. Maka kita dapat menyimpulkan bahwa $f(x)$ mempunyai limit α bila mana x menuju a jika dan hanya jika untuk setiap barisan (x_n) dalam himpunan $S\{a\}$ memenuhi x_n menuju a , maka mempunyai $f(x_n)$ mempunyai limit α , Asalkan fungsi $f\colon S \to R$, S merupakan himpunan bagian dari R , dengan $\alpha \in R$ dan untuk setiap bilangan a pada S merupakan titik limit S .

Sedangkan untuk $f(x)$ dikatakan mempunyai limit ∞ bila mana x menuju a jika dan hanya jika untuk setiap barisan (x_n) dalam himpunan $S\{a\}$ memenuhi x_n menuju a , maka mempunyai $f(x_n)$ mempunyai limit ∞ . Asalkan $f\colon S \to R$, $S \subseteq R$, dan untuk setiap bilangan a pada S merupakan titik limit S .

DAFTAR PUSTAKA

Lewin, Jonathan, 1993. *An Interactive Introduction to Mathematical Analysis.* Second Edition. New York: McGraw-Hill, inc.

Lewin, Jonathan and Myrtle Lewin.1993. *An Introduction to Mathematical Analysis*. Second Edition. New York: McGraw-Hill, inc.

Hodaifi , 2014. *Teorema Bolzano Weierstrass skripsi*, Malang: Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetauan Alam Universitas Negeri Malang.